

Série d'exercices sur la logique et raisonnement

Exercice 1 .

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x \in [-1, 0], -3x^2 + 5x + 2 < 0$.
2. $(\exists x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}), x - 2y < 0$.
3. $(\exists x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}), x < y^2$.
4. $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists y \in \mathbb{R}), x + y \succ 0$.

Exercice 2 .

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in ([1, +\infty[)^2, x \neq y \implies (x - 1)\sqrt{x + 1} \neq (y - 1)\sqrt{y + 1}$.
2. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \iff x + y = 0$.
3. Montrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 = c^2 \implies |a| \leq |c| \text{ et } |b| \leq |c|$.
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, |x + \frac{1}{x}| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{\frac{|x|}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2|x|}} \leq \sqrt{|x| + \frac{1}{|x|}}$.

Exercice 3 .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si n est un carré parfait, alors $2n$ ne peut pas être un carré parfait.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $3 \text{ divise } n^2 \iff 3 \text{ divise } n$.
3. Montrer que : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\sqrt{4n^2 + 5n + 3} \notin \mathbb{N}$.
5. Montrer que : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4, n + \sqrt{2}m = p + \sqrt{2}q \iff (n = p \text{ et } m = q)$.

Exercice 4 .

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante (E) : $|2x^2 - x - 6| - |x + 1| - 1 = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (I) et (I') :

$$(I) : \sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1 \leq 0 \quad ; \quad (I') : \sqrt{x - 1} \geq x - 7$$

Exercice 5 .

1. Montrer que : $(\forall n \geq 5), n^2 < 2^n$.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}), (\forall n \in \mathbb{N}), \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k = \frac{a^{2n+1} + 1}{a + 1}$.

4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 11 \text{ divise } 3^{2n} + 2^{6n-5}$.

Exercice 6 .

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \geq 2^{n-1}$.

2. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}), S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), S_n = 2^{n+1} - 1$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com